Problème

Les 4 premières questions de I sont en fait des rappels de cours, traités dans de nombreux manuels.

Dans tout le problème, E est un espace vectoriel euclidien de dimension n, dont le produit scalaire est noté (,). Si H est une partie de E, on définit $H^{\perp}$ par :

$$H^{\perp} = \{x \in E, \ \forall h \in H, \ (x, h) = 0\}$$

On désigne par GL (E) le groupe, pour la composition des applications, des applications linéaires bijectives de E sur E, et par O(E) le sous-groupe de GL (E) constitué des isométries :

$$O(E) = \{f \in GL(E), \forall (x, y) \in E \times E, \ (x, y) = (f(x), f(y))\}$$

$O^+(E)$ est le groupe des déplacements de E :

$$O^+(E) = \{f \in O(E), \ \det f = 1\} \quad \text{(où det f = déterminant de f).}$$

Si H est un sous-espace vectoriel de E, on désigne par σ_H la symétrie orthogonale par rapport à H. σ_H est un élément de O(E).
Si H est de codimension deux (c'est-à-dire de dimension n - 2), on dit que σ_H est un retournement.

I. 1. Prouver que $O^+(E)$ est un sous-groupe distingué de O(E) [c'est-à-dire que : $\forall g \in O(E), \ \forall f \in O^+(E), \ g \circ f \circ g^{-1} \in O^+(E)$]

2. Prouver que tout retournement appartient à $O^+(E)$.
Que peut-on dire de σ_H si H est un hyperplan de E ?

3. Soient H_1 et H_2 deux hyperplans de E tels que $H_1^{\perp} \subset H_2$.
Prouver que $H_2^{\perp} \subset H_1$, que $\sigma_{H_1} \circ \sigma_{H_2} = \sigma_{H_2} \circ \sigma_{H_1}$, et que cette isométrie est un retournement que l'on décrira.

4. Soit f un déplacement de E. Prouver qu'il existe des sous-espaces $E_o = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})$, E_1 ..., E_q, deux à deux orthogonaux, stables par f, et tels que :

$$\begin{cases} i > 0 \Rightarrow \dim E_i = 2 \text{ et } f|E_i \text{ est une rotation.} \\ E = E_o \oplus E_1 \oplus \ldots \oplus E_q \end{cases}$$

[On pourra utiliser la diagonalisation des matrices carrées unitaires : $A^{-1} = {}^tA$]. On note s = dim(Ker(f - Id)). Exprimer q à l'aide de s et n.

On pourra admettre cette question et traiter la suite du problème.

5. On suppose $n \geqslant 3$. Avec les notations de 4), on définit pour tout $i (1 \leqslant i \leqslant q)$ un élément u_i de $GL(E)$ par les formules :

$$u_i|E_i = f|E_i \quad \text{(restrictions)}, \qquad u_i|E_i^{\perp} = \mathrm{Id}.$$

a) Prouver que u_i est un déplacement de E, et qu'il existe deux droites D_i et D'_i de E_i telles que :

$$u_i = \sigma_{H_i} \circ \sigma_{H'_i}$$

où on a posé : $H_i = D_i \oplus E_i^{\perp}$, $H'_i = D'_i \oplus E_i^{\perp}$.

Dans b) c) d) suivants, on suppose $n - s > 2$.

b) Prouver que :

$$\forall i, j \quad 1 \leqslant i, j \leqslant q \quad , \quad H_i^{\perp} \subset H_j \cap H'_j .$$

c) Prouver que : $f = \sigma_{H_1} \circ \sigma_{H'_1} \circ \dots \circ \sigma_{H_q} \circ \sigma_{H'_q}$

d) Utiliser 5. c), 5. b) et 3. pour prouver que f est le produit de q retournements.

6. En utilisant l'égalité : $(A + B)^{\perp} = A^{\perp} \cap B^{\perp}$ valable pour deux sous-espaces vectoriels A et B de E, prouver que la dimension de l'espace vectoriel des points fixes d'un produit de k retournements est supérieure ou égale à $n - 2k$.

En déduire que si $q \geqslant 2$, f s'exprime comme produit de q retournements mais pas comme produit de k retournements avec $k < q$.

7. Prouver que si $q = 1$, f est un retournement ou le produit de deux retournements.

II. Dans cette partie, $n = 3$. G est un sous-groupe distingué de $O^+(E)$:

$$\forall f \in O^+(E), \ \forall g \in G, \ f \circ g \circ f^{-1} \in G.$$

On suppose $G \neq \{\mathrm{Id}\}$.

1) Décrire $f \circ g \circ f^{-1}$ si $g = \sigma_D$ (où D est une droite).

2) En utilisant la partie I, prouver que si G contient un retournement, alors $G = O^+(E)$.

3) Soit $g \in G - \{Id\}$, g n'étant pas un retournement. En utilisant les puissances de $g(g^2 = g \circ g,\ \ g^{n+1} = g^n \circ g)$, prouver que G contient une rotation r dont l'angle appartient à $] \Pi/2 ; \Pi [$

4) Prouver qu'il existe une droite D telle que D et r(D) soient orthogonales. [On pourra utiliser des coordonnées, et un argument de continuité.]

5) Soit $f = \sigma_D$. Prouver que : $h = f \circ r \circ f^{-1} \circ r^{-1}$ est un élément de G, et que c'est un retournement. Peut-on préciser la position de son axe par rapport à r(D) ?

6) Quels sont les sous-groupes distingués de $O^+(E)$?

III. Dans cette partie, à partir de la question 2), on suppose $n \geqslant 5$. G est un sous-groupe distingué non réduit à $\{\pm Id\}$ de $O^+(E)$.

1) Soit Z le centre de O(E) : $Z = \{f \in O(E),\ \forall g \in O(E),\ f \circ g = g \circ f\}$.
Soit Z^+ le centre de $O^+(E)$: $Z^+ = \{f \in O^+(E),\ \forall g \in O^+(E),\ f \circ g = g \circ f\}$.

a) Prouver que si f est une isométrie conservant globalement toute droite de E, alors $f \in \{\pm Id\}$.

b) Déterminer Z et Z^+ (on pourra utiliser σ_H où H est un hyperplan, puis un espace de codimension 2).

2) Soit $g \in G$, $g \notin \{\pm Id\}$. Prouver qu'il existe un plan P (espace de dimension 2) tel que $P \neq g(P)$. On pose $S = P + g(P)$. Quelle est la dimension de $S^\perp$?

On pose $h = \sigma_{P^\perp}$, et $k = h \circ g \circ h^{-1} \circ g^{-1}$

3) Exprimer k comme produit de deux retournements.
Prouver que k est dans G, et que k laisse stable $S^\perp$.
Que vaut la restriction $k|_{S^\perp}$?

4) Soit $x \in S^\perp \setminus \{0\}$ et y tel que $z = k(y) \neq \pm y$

a) Prouver que $\ell = \sigma_{y^\perp} \circ \sigma_{x^\perp}$ est un déplacement, et que $r = k \circ \ell \circ k^{-1} \circ \ell^{-1}$ est dans G.

b) Prouver que $k \circ \sigma_{x^\perp} = \sigma_{x^\perp} \circ k$, puis que $r = \sigma_{z^\perp} \circ \sigma_{y^\perp}$.

5. Prouver qu'il existe un sous-espace V de E de codimension 3 stable par r, tel que $r|_V = Id|_V$.

6. Déduire de III. 5. et de II que G contient un retournement.

7. Quels sont les sous-groupes distingués de $O^+(E)$.

Remarque. Le cas $n = 4$ n'est pas étudié ici. Il nécessite l'utilisation des quaternions.

Solution :

I.1 $\mathcal{O}^+$ est un sous-groupe de $\mathcal{O}$ car non vide ($Id \in \mathcal{O}^+$) et vérifiant :

$$\forall f, g \in \mathcal{O}^+ \quad \det(fg^{-1}) = \det f . (\det g)^{-1} = 1 \Rightarrow fg^{-1} \in \mathcal{O}^+$$

De plus : $\forall f \in \mathcal{O}^+ \ \forall g \in \mathcal{O} \quad \det gfg^{-1} = \det g . \det f . (\det g)^{-1} = \det f = 1 \Rightarrow gfg^{-1} \in \mathcal{O}^+$

montre que $\boxed{\mathcal{O}^+ \triangleleft \mathcal{O}}$

NB : Plus rapidement, $\mathcal{O}^+$ est le noyau du morphisme de groupes :

$$\begin{array}{ccc} (\mathcal{O}, \circ) & \longrightarrow & (\{\pm 1\}, \times) \\ f & \longmapsto & \det f \end{array}$$

I.2 * Si σ_H est un retournement, $\dim H = n-2$ et la matrice de σ_H dans la base orthonormale $e = (e_1, \dots, e_n)$ où (e_1, e_2) base de $H^\perp$ et $(e_3, \dots, e_n)$ base de H est :

$$\mathrm{Mat}(\sigma_H ; e) = \begin{pmatrix} -1 & & & 0 \\ & -1 & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & \ddots \ 1 \end{pmatrix}$$

donc $\det \mathrm{Mat}(\sigma_H ; e) = 1 \Rightarrow \sigma_H \in \mathcal{O}^+$

* Si H est un hyperplan, le même raisonnement donne $\mathrm{Mat}(\sigma_H ; e) = \begin{pmatrix} -1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & \ddots \ 1 \end{pmatrix}$

donc $\det \sigma_H = -1 \Rightarrow \sigma_H \in \mathcal{O}^- \doteq \mathcal{O} \setminus \mathcal{O}^+$.

σ_H est une symétrie hyperplane.

I.3 * $H_1^\perp \subset H_2 \Leftrightarrow H_1^{\perp\perp} \supset H_2^\perp \Leftrightarrow H_1 \supset H_2^\perp$

On dit que H_1 et H_2 sont perpendiculaires ssi $H_1^\perp \subset H_2$ (ie $H_2^\perp \subset H_1$).

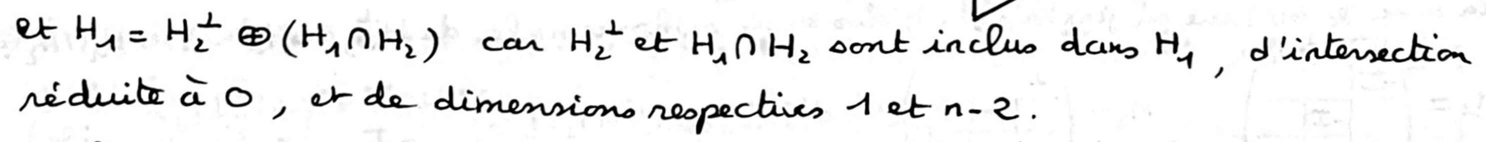
NB : De même, on dira que les sev H_1 et H_2 sont orthogonaux ssi $H_1 \subset H_2^\perp$ (ou encore : $H_2 \subset H_1^\perp$). (Ramis II.2.1.3.5°/p 55)

* $H_1 \neq H_2$ (car $H_1^\perp \subset H_2$), donc

$F = H_1 \cap H_2$ sera de dimension $n-2$

$$(\dim H_1 \cap H_2 = \underbrace{\dim H_1}_{n-1} + \underbrace{\dim H_2}_{n-2} - \underbrace{\dim(H_1 + H_2)}_{n} = n-2)$$

$E = H_1^\perp \oplus H_1$



et $H_1 = H_2^\perp \oplus (H_1 \cap H_2)$ car $H_2^\perp$ et $H_1 \cap H_2$ sont inclus dans H_1, d'intersection réduite à 0, et de dimensions respectives 1 et $n-2$.

Par suite :

(*) On peut court-circuiter ainsi ; $H_1^\perp + H_2^\perp = H_1^\perp \oplus H_2^\perp$ (car si $x \in H_1^\perp \cap H_2^\perp$, comme $H_1^\perp \subset H_2$, $x = 0$) puis $(H_1^\perp \oplus H_2^\perp)^\perp = H_1 \cap H_2 \Rightarrow E = H_1^\perp \oplus H_2^\perp \oplus (H_1 \cap H_2)$

enchaîner page suivante

$$E = H_1^{\perp} \oplus H_2^{\perp} \oplus (H_1 \cap H_2)$$

On choisit une base orthonormale $(e_1, \ldots, e_n)$ adaptée au problème ie :

(e_1) base orthonormale de $H_1^{\perp}$

(e_2) " " $H_2^{\perp}$

$(e_3, \ldots, e_n)$ " " de $H_1 \cap H_2 \doteq F$

et il suffit d'expliciter les matrices de σ_{H_1} et σ_{H_2} dans $e = (e_1, \ldots, e_n)$ pour conclure :

$$M_1 = \mathrm{Mat}(\sigma_{H_1} ; e) = \begin{pmatrix} -1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$M_2 = \mathrm{Mat}(\sigma_{H_2} ; e) = \begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ & -1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix}$$

d'où $$M_1 M_2 = M_2 M_1 = \begin{pmatrix} -1 & & & & 0 \\ & -1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{Mat}(\sigma_F ; e)$$

On aura bien : $\sigma_{H_1} \circ \sigma_{H_2} = \sigma_{H_2} \circ \sigma_{H_1} = \sigma_F$ où σ_F est le retournement par rapport à $F = H_1 \cap H_2$.

NB : Le résultat subsiste même si H_1 et H_2 ne sont plus des hyperplans. (Ramis II 2.3.1.2°/ p 60). Montrons que "Si H_1 et H_2 sont 2 sev perpendiculaires de E, alors $\sigma_{H_1} \circ \sigma_{H_2} = \sigma_{H_2} \circ \sigma_{H_1} = \sigma_{H_1 \cap H_2}$".

$F \doteq H_1 \cap H_2 = (H_1^{\perp} + H_2^{\perp})^{\perp}$ (d'après la relation générale $(V \cap W)^{\perp} = V^{\perp} + W^{\perp}$ [I])

De plus $H_1^{\perp} \cap H_2^{\perp} = \{0\}$ (car $H_1^{\perp} \cap H_2^{\perp} \subset H_2 \cap H_2^{\perp} = \{0\}$), d'où la somme directe orthogonale :

$$E = H_1^{\perp} \overset{\perp}{\oplus} H_2^{\perp} \overset{\perp}{\oplus} (H_1 \cap H_2)$$

On constate que $\sigma_{H_1} \circ \sigma_{H_2}$ et $\sigma_{H_2} \circ \sigma_{H_1}$ transforment tout x de $H_1^{\perp}$ ou $H_2^{\perp}$ en son opposé, et tout x de $H_1 \cap H_2$ en lui-même. D'où $\sigma_{H_1} \circ \sigma_{H_2} = \sigma_{H_2} \circ \sigma_{H_1} = \sigma_{H_1 \cap H_2}$

On aurait pu conclure en écrivant les matrices de σ_{H_1} et σ_{H_2}, soient M_1 et M_2, dans la base e obtenue en juxtaposant des bases orthonormales de $H_1^{\perp}$, de $H_2^{\perp}$ et de $H_1 \cap H_2$:

$$M_1 = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} H_1^{\perp} & H_2^{\perp} & H_1 \cap H_2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} -I & & \\ & I & \\ & & I \end{pmatrix} \end{array} \quad M_2 = \begin{pmatrix} I & & \\ & -I & \\ & & I \end{pmatrix} \quad \text{d'où } M_1 M_2 = M_2 M_1 = \begin{pmatrix} -I & & 0 \\ & -I & \\ 0 & & I \end{pmatrix} = \mathrm{Mat}(\sigma_{H_1 \cap H_2} ; e)$$

CQFD

I4 Soit $f \in O(E)$. On va montrer le résultat de cours suivant : "Il existe une b.o. e dans laquelle $Mat(f;e) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & -1 & & \\ & & & S_{\theta_1} & \\ 0 & & & & S_{\theta_q} \end{pmatrix}$ où $S_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ " en utilisant le Th. de diagonalisation d'un opérateur unitaire (Ramis II 4.2.1 et 4.2.2 p 111). (La preuve directe est donnée en Ramis II.2.3.5 p 72). (T Espaces hermitiens)

$\varphi : E \longrightarrow \mathbb{C}^n$ est un morphisme injectif de $\mathbb{R}$-e.v.

$x = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n \mapsto \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$

$\mathbb{C}^n$ est muni du produit scalaire hermitien $\left(\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z_1' \\ \vdots \\ z_n' \end{pmatrix} \right) = \sum \bar{z}_i z_i'$.

La matrice A de f dans la b.o. e est orthogonale (${}^tA = A^{-1}$) réelle, donc unitaire (${}^t\bar{A} = A^{-1}$) si on la considère comme une matrice à coefficients dans $\mathbb{C}$.

C'est donc la matrice d'un endomorphisme unitaire $\tilde{f}$ de $\mathbb{C}^n$ et :

* Toutes les valeurs propres de A sont de module 1 : Si x est un vecteur propre associé à λ, $\|u(x)\|^2 = \|x\|^2 \Rightarrow |\lambda|^2 \|x\|^2 = \|x\|^2 \Rightarrow |\lambda| = 1$

* Si λ et μ sont 2 v.p distinctes de $\tilde{f}$, les s.e.v. propres $E(\lambda)$ et $E(\mu)$ sont orthogonaux : En effet, si $x \in E(\lambda)$ et $y \in E(\mu)$ $(fx, y) = \bar{\lambda}(x,y)$, et $f(y) = \mu y \Leftrightarrow y = \mu f^{-1}(y)$ donc $(fx, y) = (x, f^{-1}y) = \frac{1}{\mu}(x,y) = \bar{\mu}(x,y)$, finalement $\bar{\lambda}(x,y) = \bar{\mu}(x,y) \Rightarrow (x,y) = 0$.

* A est diagonalisable dans une b.o. de $\mathbb{C}^n$ (Ramis II 4.2.2 déjà cité)

* A étant réelle, $\chi_A(X) = \det(A - XI) \in \mathbb{R}[X]$ donc si λ est une v.p. de A de multiplicité k, $\bar{\lambda}$ sera une v.p. de A de multiplicité k.

On peut donc exhiber une b.o. $e' = (\underbrace{e_1', \dots, e_p'}_{\text{vecteurs propres associés à } 1}, \underbrace{e_{p+1}', \dots, e_{p+s}'}_{\text{vect. propres associés à } -1}, \underbrace{e_{p+s+1}', \dots, e_n'}_{\text{vect. propres associés à } \lambda \notin \mathbb{R}})$

1) On peut supposer que $e_1', \dots, e_{p+s}'$ sont des vecteurs réels (ie à coordonnées réelles) :

En effet, si $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ et si λ est une v.p. réelle de A, le sev propre $E(\lambda)$ peut être considéré comme un $\mathbb{R}$-sev de $\mathbb{R}^n$ ou un $\mathbb{C}$-sev de $\mathbb{C}^n$. Notons le $E_{\mathbb{R}}(\lambda)$ ou $E_{\mathbb{C}}(\lambda)$ suivant le cas. Si $e = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de $E_{\mathbb{R}}(\lambda)$, alors c'est aussi une base de $E_{\mathbb{C}}(\lambda)$ puisque $e_1, \dots, e_n$ sont toujours libres dans $E_{\mathbb{C}}(\lambda)$, et si $x \in E_{\mathbb{C}}(\lambda)$ $x \in \mathbb{C}^n$ et $A(x) = \lambda x$ $\Rightarrow A(\bar{x}) = \lambda \bar{x} \Rightarrow \bar{x} \in E_{\mathbb{C}}(\lambda)$, d'où $\frac{x + \bar{x}}{2}$ et $\frac{x - \bar{x}}{2i}$ dans $E_{\mathbb{R}}(\lambda)$, donc s'expriment comme comb. lin. à coeff. réels de $e_1, \dots, e_n$. Donc $x = \frac{x+\bar{x}}{2} + i\left(\frac{x - \bar{x}}{2i}\right) \in Vect_{\mathbb{C}}(e_1, \dots, e_n)$ et e est bien une base de $E_{\mathbb{C}}(\lambda)$ formée de vecteurs réels. CQFD

2) Vecteurs $e'_{p+s+1}, \dots, e'_n$: On les associe 2 à 2 de sorte que :

$$(e'_j, e'_{j+1}) \quad e'_j \in E(\lambda) \quad e'_{j+1} = \bar{e}'_j \in E(\bar{\lambda})$$

car $x \in E(\lambda) \Leftrightarrow Ax = \lambda x \Leftrightarrow A\bar{x} = \bar{\lambda}\bar{x} \Leftrightarrow \bar{x} \in E(\bar{\lambda})$ montre que si λ est vp, $\bar{\lambda}$ l'est aussi et $\overline{E(\lambda)} = E(\bar{\lambda})$.

Enfin, dans chaque sev E_j de base orthonormale (e'_j, e'_{j+1}) on préfère la base $(\varepsilon_j, \varepsilon_{j+1}) = \left(\frac{e'_j + e'_{j+1}}{\sqrt{2}}, \frac{e'_j - e'_{j+1}}{i\sqrt{2}} \right)$ qui a le mérite d'être orthonormale $\left(\|\varepsilon_{j+1}\|^2 = \left|\frac{1}{i\sqrt{2}}\right|^2 + \left|\frac{1}{i\sqrt{2}}\right|^2 = 1 \dots \right)$ et formée de vecteurs réels (car $e'_{j+1} = \bar{e}'_j$).

Notons $\lambda = e^{i\theta}$ et $\bar{\lambda} = e^{-i\theta}$ les v.p. associées à e'_j et e'_{j+1}. La matrice représentant $\tilde{f}|_{E_j}$ dans la n^elle^ base $(\varepsilon_j, \varepsilon_{j+1})$ sera :

$$B_j = P^{-1} \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix} P = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = S_{-\theta} \qquad \text{puisque } P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{i\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{i\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Ccl : Il existe une b.o. $e'' = (e'_1, \dots, e'_{p+s}, \varepsilon'_{p+s+1}, \dots, \varepsilon'_n)$ de $\mathbb{C}^n$, formée de vecteurs réels et telle que :

$$M \doteq \mathrm{Mat}(\tilde{f}\,; e'') = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & -1 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & -1 & \\ & & & & & & S_{\theta_1} \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & S_{\theta_q} \end{pmatrix}$$

(p termes égaux à 1, s termes égaux à -1)

Il existe donc P unitaire telle que $M = P^{-1}AP$. P est la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{C}^n$ vers e'', qui est formée de vecteurs réels. P est donc à coefficients réels : elle est donc orthogonale.

M représentera bien la matrice de f dans une b.o de E.

Dans notre problème, f est un déplacement donc la multiplicité de la v.p. -1 sera paire. On pourra associer les vecteurs de la b.o. de $\mathrm{Ker}(f+\mathrm{Id})$ 2 par 2 pour définir des rotations (en fait $-\mathrm{Id}$) sur chacun des plans ainsi construits.

Finalement :

$\forall f \in \mathcal{O}^+(E) \quad \exists E_0 = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}), E_1, \dots, E_q$ plans orthogonaux, stables par f tels que $\forall i \in \mathbb{N}_q \quad f|_{E_i}$ est une rotation et $E = E_0 \oplus \dots \oplus E_q$

Si $s = \dim \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})$, on aura $s + 2q = n$ d'où $\boxed{q = \frac{n-s}{2}}$

I.5.a * $u_i|_{E_i}$ est une rotation plane et $u_i|_{E_i^\perp} = Id_{E_i^\perp}$. Comme $E = E_i \oplus E_i^\perp$, u_i sera une application orthogonale. La matrice de f étant

$$M = \begin{pmatrix} I_s & & & 0 \\ & S_{\theta_1} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & S_{\theta_q} \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad S_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad I_s = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \ (s),$$

celle de u_i sera :
$$Mat(u_i ; e) = \begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & S_{\theta_i} & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix}$$
dans une base orthonormale e convenable, d'où $\det u_i = \det S_{\theta_i} = 1 \Rightarrow$ $\underline{u_i \in O^+(E)}$

* $u_i|_{E_i} = f|_{E_i}$ est une rotation plane, donc s'écrit comme composée de 2 symétries s_{D_i} et $s_{D'_i}$ par rapport à des droites :
$$u_i|_{E_i} = s_{D_i} \circ s_{D'_i}$$

$E_i^\perp$, D'_i, D_i, E_i

Posons $\begin{cases} H_i = D_i \oplus E_i^\perp \\ H'_i = D'_i \oplus E_i^\perp \end{cases}$.

H_i et H'_i sont des hyperplans et $u_i = \sigma_{H_i} \circ \sigma_{H'_i}$

(car $x \in E_i^\perp \Rightarrow \sigma_{H_i} \circ \sigma_{H'_i}(x) = x$ et $u_i(x) = x$

$x \in E_i \Rightarrow \sigma_{H_i} \circ \sigma_{H'_i}(x) = s_{D_i} \circ s_{D'_i}(x) = u_i|_{E_i}(x) = u_i(x)$ puisque $\sigma_{H_i}|_{E_i} = s_{D_i} \dots$)

I.5.b

$H_j \cap H'_j = (D_j \oplus E_j^\perp) \cap (D'_j \oplus E_j^\perp) \supset E_j^\perp$ et $\dim H_j \cap H'_j = \dim H_j + \dim H'_j - \dim(H_j + H'_j)$ $= (n-1) + (n-1) - n = n-2$ car $H_j \neq H'_j$ (sinon $D_j = D'_j$ d'où $u|_{E_i} = s_{D_j} \circ s_{D_j} = Id$ impossible d'après le choix de I.4). De $\dim E_j^\perp = n - \dim E_j = n-2$ on déduit :

$$\boxed{H_j \cap H'_j = E_j^\perp} \quad (*)$$

Cela étant : $H_i^\perp \subset H_j \cap H'_j = E_j^\perp \iff E_j \subset H_i$ ce qui est vrai puisque $E_j \subset E_i^\perp \subset D_i \oplus E_i^\perp = H_i$.

CQFD

(*) <u>Autre preuve</u> : $x \in H_j \cap H'_j \Rightarrow x = x_1 + x_2 = x'_1 + x'_2$ avec $x_1 \in D_j$, $x_2 \in E_j^\perp$, $x'_1 \in D'_j$, $x'_2 \in E_j^\perp$
$\Rightarrow x_1 - x'_1 = x'_2 - x_2 \in E_j^\perp \cap E_j = \{0\} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x'_1 \in D_j \cap D'_j = \{0\} \\ x_2 = x'_2 \end{cases}$ car $D_j \neq D'_j$ dans E_j (sinon $f|_{E_i} = Id_{E_i}$ à rejeter)
Donc $x = x_2 \in E_j^\perp$, et $H_j \cap H'_j \subset E_j^\perp$. L'inclusion inverse est triviale.

I.5.c

Gn a $f = u_1 \circ u_2 \circ \dots \circ u_q$ car $\forall i \in \mathbb{N}_q$ $\forall x \in E_i$ $u_1 \circ \dots \circ u_q(x) = u_i(x) = f(x)$ (en effet $u_j(x) = x$ dès que $j \neq i$).

I.5.a entraine bien : $f = \sigma_{H_1} \circ \sigma_{H'_1} \circ \dots \circ \sigma_{H_q} \circ \sigma_{H'_q}$

I.5.d Soit $n-s > 2$, ie $q > 1$.

De $H_i^\perp \subset H_j \cap H'_j$ on déduit (I.3) que σ_{H_i} commute avec σ_{H_j} et $\sigma_{H'_j}$ donc :

on permute

$$f = \underbrace{\sigma_{H_1} \circ \sigma_{H_2}}_{\sigma_{F_1}} \circ \underbrace{\sigma_{H'_1} \circ \sigma_{H'_2}}_{\sigma_{F_2}} \circ \dots \circ \underbrace{\sigma_{H_{q-1}} \circ \sigma_{H_q}}_{\sigma_{F_{q-1}}} \circ \underbrace{\sigma_{H'_{q-1}} \circ \sigma_{H'_q}}_{\sigma_{F_q}} \qquad (*).$$

I.3 entraine que $\sigma_{H_i} \circ \sigma_{H_j} = \sigma_{H_i \cap H_j}$ = retournement de base $H_i \cap H_j$.

Gn aura aussi $\sigma_{H'_i} \circ \sigma_{H'_j} = \sigma_{H'_j} \circ \sigma_{H'_i} = \sigma_{H'_i \cap H'_j}$ d'après I.3 puisque le même raisonnement qu'au I.5.b montre que $H_i'^{\perp} \subset H_j \cap H'_j$.

<u>Conclusion</u> : $f = \sigma_{F_1} \circ \dots \circ \sigma_{F_q}$ est le produit de $q = \frac{n-s}{2}$ retournements dès que $n-s > 2$.

~~, $f = Id_E$ sera produit de 2 retournements. Ainsi $O^+(E)$ est engendré par l'ensemble des retournements de E dès que $\dim E = n \geq 3$.~~

<u>NB</u> : Si $n-s = 2$, le résultat n'est plus assuré. Penser au contre-exemple : $n = 3$, f = rotation vect. d'axe Δ, $s = 1$, et f n'est pas la composée de $\frac{n-s}{2} = 1$ retournement en général ! Cela provient de (*) où nous avons besoin de 4 symétries hyperplanes au moins pour pouvoir les permuter et conclure.

I.6

* Si $f=\sigma_{F_1}\circ\ldots\circ\sigma_{F_k}$ est le produit de k retournements, $F_1\cap\ldots\cap F_k\subset \mathrm{Ker}(f-Id)$ entraîne $\dim(F_1\cap\ldots\cap F_k)\leq \dim \mathrm{Ker}(f-Id)$.

Notons $F_i=G_i^{\perp}$ où $\dim F_i=n-2$ et $\dim G_i=2$.

$$F_1\cap\ldots\cap F_k = G_1^{\perp}\cap\ldots\cap G_k^{\perp} = (\underbrace{G_1+\ldots+G_k}_{\dim\leq 2k})^{\perp}$$ sera de dimension $\geq n-2k$.

Par suite $\boxed{n-2k\leq \dim F_1\cap\ldots\cap F_k \leq \dim \mathrm{Ker}(f-Id)}$

* Si $q\geq 2 \Leftrightarrow n-s>2$, I.5.d a montré que $f=\sigma_{F_1}\circ\ldots\circ\sigma_{F_q}$ où $\dim F_i=n-2$, $q=\frac{n-s}{2}$ et $s=\dim \mathrm{Ker}(f-Id)$.

Soit $f=\sigma_{G_1}\circ\ldots\circ\sigma_{G_k}$ une autre décomposition de f en produit de retournements.

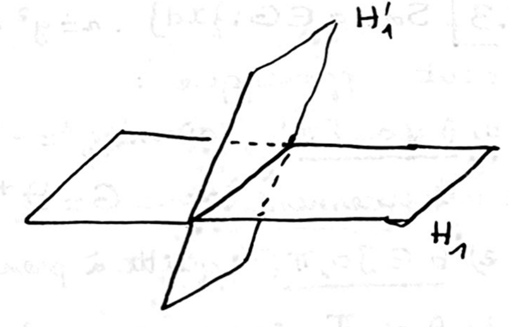
Alors : $\dim \mathrm{Ker}(f-Id)=s\geq n-2k \Rightarrow n-2q\geq n-2k \Rightarrow k\geq q$.

<u>$f=\sigma_{F_1}\circ\ldots\circ\sigma_{F_q}$ est donc une décomposition minimale de f en produit de retournement dès que $n-s>2$.</u>

I.7 <u>Si $q=1 \Leftrightarrow n-s=2$, 2 cas sont possibles :</u>

1) Si $\mathrm{Mat}(f;e)=\begin{pmatrix}1&&&\\&\ddots&&\\&&1&\\&&&\begin{smallmatrix}-1&0\\0&-1\end{smallmatrix}\end{pmatrix}$ (E_0, E_1), f est un retournement de base E_1.

2) Si $\mathrm{Mat}(f;e)=\begin{pmatrix}1&&&\\&\ddots&&\\&&1&\\&&&S_\theta\end{pmatrix}$ où $S_\theta\neq\pm I$, $f=u_1=\sigma_{H_1}\circ\sigma_{H_1'}$ d'après I.5.



$H_1\neq H_1'$ (sinon $f=Id$ et $n-s=0$) et il existe un hyperplan H perpendiculaire à H_1 et H_1' (H contenant les droites $H_1^{\perp}$ et $H_1'^{\perp}$), de sorte que :

$$f=\sigma_{H_1}\circ\sigma_H\circ\sigma_H\circ\sigma_{H_1'} = \sigma_{H_1\cap H}\circ\sigma_{H\cap H_1'}$$ d'après I.3.

<u>Ccl : $O^+(E)$ est engendré par l'ensemble des retournements</u> et, dans chaque cas ($n-s=2$ ou $n-s>2$) nous avons exhibé des décompositions minimales.

II.1 $\det f\sigma_D f^{-1} = \det \sigma_D = 1$ donc $f\sigma_D f^{-1} \in O^+(E)$.

Comme $f\sigma_D f^{-1} \neq Id$ (sinon $\sigma_D = Id$), $f\sigma_D f^{-1}$ sera une rotation d'axe et d'angle à déterminer.

$$f\sigma_D f^{-1}(x) = x \Leftrightarrow \sigma_D f^{-1}(x) = f^{-1}(x) \Leftrightarrow f^{-1}(x) \in D \Leftrightarrow x \in f(D)$$

L'axe est $f(D)$. On prouve ensuite que $\forall y \in f(D)^\perp$ $f\sigma_D f^{-1}(y) = -y$ comme dans la 2^e^ sol. qui suit. ~~$\in f^{-1}(f(D)^\perp) = D^\perp$~~

~~Enfin, pour tout $x \in f(D)^\perp$ $(x \mid f\sigma_D f^{-1}x) = (f^{-1}x \mid \sigma_D f^{-1}x) = (f^{-1}x \mid -f^{-1}x) = -\|f^{-1}x\|^2 = -\|x\|^2$~~
~~donc $\cos(x, f\sigma_D f^{-1}x) = -1 \Rightarrow f\sigma_D f^{-1}x = -x$~~
~~$f\sigma_D f^{-1}$ sera le retournement d'axe $f(D)$: $\boxed{f\sigma_D f^{-1} = \sigma_{f(D)}}$~~

<u>2^e^ solution</u> : $E = f(D) \oplus f(D)^\perp$. Soit $x = y + z$ où $y = f(d) \in f(D)$ et $z \in f(D)^\perp$.

On a : $f\sigma_D f^{-1}(x) = f(d) + f\sigma_D f^{-1}(z) = y + f\sigma_D f^{-1}(z)$

f est une isométrie, donc $f(V^\perp) = f(V)^\perp$ pour tout sev V (car $x \in f(V^\perp) \Leftrightarrow \exists y \in V^\perp$ $x = f(y) \Leftrightarrow f^{-1}(x).z = 0$ $\forall z \in V \Leftrightarrow x.f(z) = 0$ $\forall z \in V \Leftrightarrow x \in f(V)^\perp$).

Ici $z \in f(D)^\perp = f(D^\perp) \Rightarrow f^{-1}(z) \in D^\perp \Rightarrow f\sigma_D f^{-1}(z) = -z$.

On en déduit :
$$f\sigma_D f^{-1}(x) = y - z$$

ie $f\sigma_D f^{-1}$ <u>est le retournement d'axe $f(D)$</u>.

II.2 Si G contient un retournement d'axe D, il contiendra tous les retournements d'axe $f(D)$ pour tout $f \in O^+(E)$ (II.1). Comme toute droite D' est l'image de D par une isométrie f, G contiendra tous les retournements donc tout $O^+(E)$ (puisque les retournements engendrent $O^+(E)$, cf I). Finalement $\boxed{G = O^+(E)}$

II.3 Si $g \in G \setminus \{Id\}$ n'est pas un retournement, c'est une rotation d'axe D et d'angle $\theta \not\equiv 0$ $[\pi]$ (dans $D^\perp$ orienté arbitrairement). On peut supposer $\theta \in]0, 2\pi[$, puis $\theta \in]0, \pi[$ quitte à prendre g^{-1} au lieu de g.

* Si $\theta \in]\frac{\pi}{2}, \pi[$, c'est fini.
* Si $\theta = \frac{\pi}{2}$ $[2\pi]$, g^2 sera d'angle π ie un retournement donc $G = O^+$ (II.2)
* Si $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$, $\exists n \in \mathbb{N}^*$ $n\theta \in]\frac{\pi}{2}, \pi[$ et l'on prend $r = g^n$ (d'angle $n\theta$)

(En effet : $\frac{\pi}{2} < n\theta < \pi \Leftrightarrow \frac{\pi}{2\theta} < n < \frac{\pi}{\theta} \Leftrightarrow \frac{\pi}{\theta} - \frac{\pi}{2\theta} = \frac{\pi}{2\theta} > 1$)

<u>Ccl</u> : Dans tous les cas, G contient une rotation r d'angle appartenant à $]\frac{\pi}{2}, \pi[$.

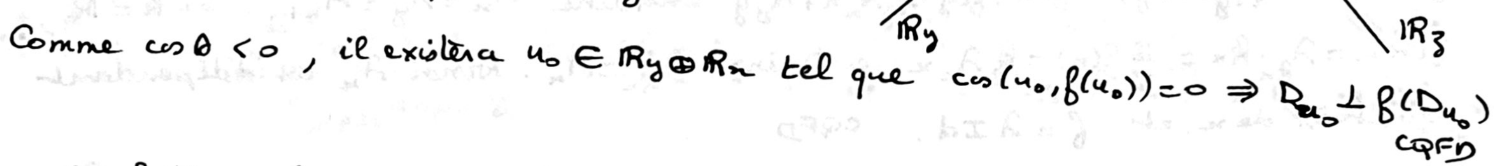
II.4

1° solution : Soient $\mathbb{R}x$ l'axe de f, $y \in (\mathbb{R}x)^\perp$ et $\mathbb{R}z = \mathbb{R}(f(y))$.

Si u est un vecteur unitaire du plan Oxy et si $D_u = \mathbb{R}u$, $f(D_u)$ sera la droite dirigée par $f(u)$.

$f(D_u)$ est dans le plan Oxz et :

$u \longmapsto \cos(\widehat{u, f(u)})$ définit une fonction continue de u valant 1 quand $u = x$ et $\cos\theta$ pour $u \in \mathbb{R}y$.



Comme $\cos\theta < 0$, il existera $u_0 \in \mathbb{R}y \oplus \mathbb{R}x$ tel que $\cos(u_0, f(u_0)) = 0 \Rightarrow D_{u_0} \perp f(D_{u_0})$

CQFD

2° solution : La matrice de la rotation r s'écrit, dans une base orthonormale adéquate :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad \text{où } \theta \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$$

Notons $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. $\quad \vec{u} \perp r(\vec{u}) \iff x^2 + y(y\cos\theta - z\sin\theta) + z(y\sin\theta + z\cos\theta) = 0$

$$\iff x^2 + (y^2 + z^2)\cos\theta = 0$$

Comme $\cos\theta < 0$, il suffit de prendre $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{-\cos\theta} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ pour obtenir un vecteur directeur de D telle que $D \perp r(D)$.

II.5

$r \in G \Rightarrow f \circ r \circ f^{-1} \in G$ et comme $r^{-1} \in G$, $f \circ r \circ f^{-1} \circ r^{-1} \doteq h \in G$.

Notons $f = \sigma_D$. $h = \sigma_D \circ r \circ \sigma_D \circ r^{-1} = \sigma_D \, \sigma_{r(D)}$ d'après II.1

Comme $D \perp r(D)$, $h = \sigma_D \, \sigma_{r(D)} = \sigma_{(D + r(D))^\perp}$ <u>est bien un retournement par rapport à une droite orthogonale à $r(D)$.</u> ($h = \sigma_D \, \sigma_{r(D)}$ est une rotation d'axe $(D + r(D))^\perp$ et d'angle plat puisque si $x \in D + r(D)$ $x = y + z$, $y \in D$, $z \in r(D)$ et $\sigma_D \, \sigma_{r(D)}(x) = \sigma_D(-y + z) = -y - z = -x$)

II.6 Tout sous-groupe distingué G de $\mathcal{O}^+(E)$ distinct de $\{Id\}$, contiendra un retournement (II.5) donc sera égal à $\mathcal{O}^+(E)$. (II.2)
Les seuls sous-groupes distingués de $\mathcal{O}^+(E)$ sont donc $\{Id\}$ et $\mathcal{O}^+(E)$. On dit que <u>$\mathcal{O}^+(E)$ est simple</u>.

III.1.a On a le résultat classique :

<u>lemme</u> : Un endomorphisme f qui laisse stable toutes les dtes vect. est une homothétie vect.

preuve : $\forall x \in E \quad \exists \lambda_x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \lambda_x x$. Si x et y sont lin. indépendants, $f(x+y) = \lambda_{x+y}(x+y) = f(x) + f(y) = \lambda_x x + \lambda_y y$ entraîne $\lambda_x = \lambda_y = \lambda_{x+y}$. Si $k \in \mathbb{R}$, $f(kx) = \lambda_{kx} \cdot kx = k f(x) = k \lambda_x x$ entraîne $\lambda_{kx} = \lambda_x$. Ainsi λ_x est indépendant du choix de x et $f = \lambda\, Id$. CQFD

Si $f \in \mathcal{O}(E)$ laisse stable chaque droite, f sera donc une homothétie dont le rapport ne peut être que ± 1 (car $\|\lambda Id(x)\| = \|x\| \Rightarrow |\lambda| = 1$), ie $f = \pm Id$.

III.1.b

* <u>Z ?</u> Si $f \in Z$, $f \sigma_D = \sigma_D f$ pour toute droite $D = \mathbb{R}x$, d'où $f(x) = \sigma_D f(x)$ et $f(x) \in D$. f laissera stable toutes les dtes vectorielles, donc $f = \pm Id$.
La réciproque étant évidente : $\boxed{Z = \{\pm Id\}}$

* <u>Z^+</u> ? Si $f \in Z^+$, $f \sigma_F = \sigma_F f$ où $\dim F = n-2$ (de sorte que $\sigma_F \in \mathcal{O}^+$).
Si $x \in F$, $f(x) = \sigma_F f(x)$ montre que $f(F) \subset F$ donc $f(F^\perp) \subset F^\perp$.
Tout plan $F^\perp$ de E est donc stable par f, donc toute droite de E est stable par f (comme intersection de 2 plans) d'où $f \in \{\pm Id\}$.
Concluons :

$$\begin{cases} \text{Si } n \text{ pair}, & Z^+ = \{\pm Id\} \\ \text{Si } n \text{ impair}, & Z^+ = \{Id\} \end{cases}$$

III.2 Soit $g \in G \setminus \{\pm Id\}$. Si $g(P)=P$ pour tout plan P, $g(D)=D$ pour toute dte D (D étant intersection de 2 plans) donc $g = \pm Id$. Absurde.
Il existe donc P tel que $P \neq g(P)$.

$$\dim S = \dim(P+g(P)) = \underbrace{\dim P}_{2} + \underbrace{\dim g(P)}_{2} - \underbrace{\dim P\cap g(P)}_{0 \text{ ou } 1} = \begin{cases} 3 \\ \text{ou} \\ 4 \end{cases}$$

donc $\boxed{\dim S^\perp = n-4 \text{ ou } n-3}$.

Si $n \geq 5$, $\dim S^\perp \geq 1$ donc $\boxed{S^\perp \neq \emptyset}$

III.3 On pose $h = \sigma_{P^\perp}$ et $k = hgh^{-1}g^{-1}$.

* $k = \sigma_{P^\perp} \circ \underbrace{g \circ \sigma_{P^\perp} \circ g^{-1}}_{\sigma_{g(P^\perp)} \text{ d'après II.1}} = \sigma_{P^\perp} \circ \sigma_{g(P^\perp)}$. Soit $\boxed{k = \sigma_{P^\perp} \circ \sigma_{g(P^\perp)}}$

* $G \triangleleft O^+$ et $g \in G$ donc $\sigma_{P^\perp} g \sigma_{P^\perp}^{-1} \in G$. De plus $g^{-1} \in G$ entraine $\underline{k = \sigma_{P^\perp} g \sigma_{P^\perp} g^{-1} \in G}$

* Comme $S^\perp = (P+g(P))^\perp = P^\perp \cap g(P)^\perp$, on aura $\boxed{k|_{S^\perp} = Id_{S^\perp}}$

III.4 Le choix de z tel que $z = k(y) \neq \pm y$ est possible car $k(y) = \pm y$ pour tout $y \in E$ entraine que k conserve les droites de E, donc $k = \pm Id$ (III.1) ce qui est absurde car alors :

$$k = \sigma_{P^\perp}\sigma_{g(P^\perp)} = \pm Id \Leftrightarrow \sigma_{P^\perp} = \pm\sigma_{g(P^\perp)} \Leftrightarrow \begin{cases} P^\perp = g(P^\perp) \Leftrightarrow P = g(P) \text{ faux} \\ \text{ou} \\ P = g(P^\perp) \text{ absurde car } n \geq 5 \end{cases}$$

(dim$P = 2$ et dim$g(P^\perp) = n-2$)

a) $\ell \in O(E)$ étant le produit de 2 symétries hyperplanes qui sont dans $O^-(E)$, donc $\ell \in O^+(E)$.

On aura bien : $r = \underbrace{k}_{\in G} \underbrace{(\ell k^{-1} \ell^{-1})}_{\in G \text{ car } G \triangleleft O^+} \in G$

b) * On a $k\sigma_{x^\perp}k^{-1} = \sigma_{k(x^\perp)}$ d'après II.1, et $x \in S^\perp \Rightarrow k(x) = x$ (III.3)

d'où $\sigma_{k(x^\perp)} = \sigma_{k(x)^\perp} = \sigma_{x^\perp}$. Ainsi : $\boxed{k \circ \sigma_{x^\perp} = \sigma_{x^\perp} \circ k}$

* Puis : $r = k\sigma_{y^\perp}\underbrace{\sigma_{x^\perp}k^{-1}\sigma_{x^\perp}}_{k^{-1}}\sigma_{y^\perp} = \underbrace{k\sigma_{y^\perp}k^{-1}}_{\sigma_{k(y^\perp)} = \sigma_{k(y)^\perp} = \sigma_{z^\perp}}\sigma_{y^\perp} = \sigma_{z^\perp}\sigma_{y^\perp}$

Ainsi $\boxed{r = \sigma_{z^\perp} \circ \sigma_{y^\perp}}$

III.5 $r = \sigma_{z^\perp}\sigma_{y^\perp}$ donc $z^\perp \cap y^\perp \subset \ker(r - Id)$

$z^\perp$ et $y^\perp$ sont des hyperplans distincts de E (car $z^\perp = y^\perp \Rightarrow \mathbb{R}z = \mathbb{R}y \Rightarrow z = k(y) = \pm y$ faux)
donc $z^\perp \cap y^\perp$ est de dimension $n-2$ (car $\dim z^\perp \cap y^\perp = \dim z^\perp + \dim y^\perp - \dim(z^\perp + y^\perp)$
$= (n-1)+(n-1)-n = n-2$) et il existera un sev V de E de dimension $n-3$ inclus dans $z^\perp \cap y^\perp$. On aura $r|_V = Id_V$.

III.6 $r \in G$ et $r|_V = Id_V$ montre que :

- $V^\perp$ est stable par r
- $r|_{V^\perp} \in \mathcal{O}^+(V^\perp)$

Si $r|_{V^\perp}$ est un retournement de $\mathcal{O}^+(V^\perp)$, r sera un retournement de $\mathcal{O}^+(E)$.
Sinon, comme $\dim V^\perp = 3$, on peut appliquer II et construire un retournement h de $V^\perp$ à partir de la rotation $r|_{V^\perp}$ (II.3 à II.5)
On prolonge ce retournement par l'identité sur V pour obtenir un retournement de E, qui sera dans G.

__Ccl__ : Si $G \neq \{\pm Id\}$, G contiendra un retournement, donc tous les retournements (II.1), donc $G = \mathcal{O}^+(E)$ (II.2, car les retournements engendrent $\mathcal{O}^+(E)$ d'après I)

III.7 Si $G \triangleleft \mathcal{O}^+(E)$, $G = \mathcal{O}^+(E)$ ou $G \subset \{\pm Id\}$.

Les sous-groupes distingués de $\mathcal{O}^+(E)$ sont donc :

$$\{Id\}, \quad Z^+ \quad \text{et} \quad \mathcal{O}^+(E)$$

__NB__ : __Si n est impair__, $Z^+ = \{Id\}$ et __$\mathcal{O}^+(E)$ sera simple__.